Ηλεκτρονικοι Υπολογιστες ΙΙ — Αριθμητικη Αναλυση

Θέματα Εξέτασης Θεωρίας — Ιούνιος 2017

1. Να αναφέρετε συνοπτικά τη διαδικασία που θα ακολουθήσετε για να υπολογίσετε προσεγγιστικά την τιμή της συνάρτησης

$$f(\theta) = \int_0^\theta \exp\left(2\sin^2(t/2)\right) \mathrm{d}t$$

   σε κάποια τιμή θ. Κατόπιν, υπολογίστε την στο $\theta = \pi/2$ με τουλάχιστον 5 σημαντικά ψηφία. [Ακριβής τιμή $2.3732889\ldots$]

   Υπόδειξη: τα πρώτα έξι πολυώνυμα Legendre είναι

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= 1 \\
P_1(x) &= x \\
P_2(x) &= (3x^2 - 1)/2 \\
P_3(x) &= (5x^3 - 3x)/2 \\
P_4(x) &= (35x^4 - 30x^2 + 3)/8 \\
P_5(x) &= (63x^5 - 70x^3 + 15x)/8\ .
\end{aligned}$$

2. Να αναφέρετε συνοπτικά τη διαδικασία που θα ακολουθήσετε για να κατασκευάσετε μια συνάρτηση που να είναι λόγος δύο πολυωνύμων m και n βαθμού και η οποία να προσεγγίζει μια συνάρτηση $f(x)$ στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

   Ακολουθήστε τη για να προσεγγίσετε την $f(x) = 1/\sin x$ στο διάστημα $[1, 2]$ με τη συνάρτηση $R(x) = (x^2 + ax + b)/(cx + d)$.

Διάρκεια: 60 λεπτά **Καλή επιτυχία!**

Ηλεκτρονικοι Υπολογιστες ΙΙ — Αριθμητικη Αναλυση

Θέματα Εξέτασης Εργαστηρίου — Ιούνιος 2017

1. Μια περιοδική συνάρτηση $f(x)$ με περίοδο L, μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)$$

με

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{L}\int_0^L \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) f(x)\mathrm{d}x\,, \qquad n \geq 0\,, \\ B_n &= \frac{2}{L}\int_0^L \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) f(x)\mathrm{d}x\,, \qquad n > 0\,. \end{aligned}$$

Η συνάρτηση

$$Cl_2(\theta) = -\int_0^{\theta} \ln\left|2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right| \mathrm{d}t$$

είναι περιοδική με περίοδο 2π. Υπολογίστε τους συντελεστές Fourier A_0, A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3 για αυτή. [Απάντηση: $A_n = 0$, $B_n = 1/n^2$.]

Υπόδειξη: αν χρησιμοποιήσετε κλειστό τύπο Newton–Cotes για τον υπολογισμό της $Cl_2(\theta)$, αποφύγετε τα σημεία $\theta = 0, 2\pi$.

2. Μια άγνωστη συνάρτηση $y(x)$ ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση $y' = f(x, y)$ και έχει τιμή y_0 στο σημείο x_0. Στο σημείο x_1 έχει τιμή y_1 που ικανοποιεί την προσεγγιστική σχέση

$$y_0 \approx y_1 + (x_0 - x_1) f(x_1, y_1)\,.$$

Το σφάλμα της προσέγγισης είναι ανάλογο του $(x_1 - x_0)^2$.

Βρείτε προσεγγιστικά την τιμή της συνάρτησης $y(x)$ στο σημείο 2.0 αν στο $x = 0$ έχει τιμή 1.0 και ικανοποιεί τη σχέση $0.02y' + y - \cos x = 0$.

Να αναφέρετε τον αλγόριθμο που ακολουθείτε καθώς και να εξηγήσετε τις επιλογές παραμέτρων που κάνετε, με σχόλια στον κώδικά σας.

3. Μπορεί να δειχθεί ότι οι ρίζες του πολυωνύμου $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$ είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα («συνοδεύων πίνακας»)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Ελέγξτε το ως εξής: βρείτε μία ρίζα του πολυωνύμου

$$p(x) = x^6 - \frac{15}{11}x^4 + \frac{5}{11}x^2 - \frac{5}{231}\,,$$

κατασκευάστε το συνοδεύοντα πίνακα και δείξτε ότι η ρίζα αποτελεί ιδιοτιμή του.

Να στείλετε τους κώδικες που θα γράψετε, ως συνημμένους σε email στο `ety213@materials.uoc.gr`.

Διάρκεια: 90 λεπτά **Καλή επιτυχία!**