

Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση

Σταμάτης Σταματιάδης
stamatis@materials.uoc.gr

Τμήμα Επιστήμης και Τεχνολογίας Υλικών,
Πανεπιστήμιο Κρήτης

ΤΡΙΤΗ ΔΙΑΛΕΞΗ

Μέθοδος Müller (1/2)

Μέθοδος Müller για την επίλυση της $f(x) = 0$

- Η μέθοδος προσεγγίζει τη συνάρτηση με *παραβολή* (εξίσωση της μορφής $y = ax^2 + bx + c$).
- Χρειάζεται *τρία* σημεία $(x_i, f(x_i))$ για τον προσδιορισμό της καμπύλης, δηλαδή για τον προσδιορισμό των τριών συντελεστών της. Οι τιμές x_0, x_1, x_2 που επιλέγουμε θεωρούνται οι τρεις πρώτες προσεγγίσεις στη ρίζα.
- Ως αποτέλεσμα της μεθόδου θεωρείται η ρίζα της παραβολής που είναι πιο κοντά στην προηγούμενη προσέγγιση. Είναι η προσέγγιση x_3 .
- Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία για τα σημεία x_1, x_2, x_3 ώστε να υπολογίσουμε μια ακόμα καλύτερη προσέγγιση (τη x_4) κ.ο.κ.
- Η μέθοδος Müller έχει τάξη σύγκλισης σε απλή ρίζα, $\alpha \approx 1.84$.

Μέθοδος Müller (2/2)

Αλγόριθμος επίλυσης της $f(x) = 0$ με τη μέθοδο Müller

1. Επιλέγουμε τρεις διαφορετικές τιμές x_0, x_1, x_2 στην περιοχή της αναζητούμενης ρίζας. Τα σημεία $(x_i, f(x_i))$ δεν πρέπει να ανήκουν στην ίδια ευθεία.
2. Ορίζουμε τις ποσότητες

$$w_0 = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} \quad w_1 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$
$$a = \frac{w_1 - w_0}{x_1 - x_0}, \quad b = w_0 + a(x_2 - x_0), \quad c = f(x_2).$$

3. Η επόμενη προσέγγιση της ρίζας δίνεται από τη σχέση

$$x_3 = x_2 - \frac{2c}{d},$$

όπου d ο, εν γένει μιγαδικός, αριθμός που έχει το μεγαλύτερο μέτρο μεταξύ των $b + \sqrt{b^2 - 4ac}$, $b - \sqrt{b^2 - 4ac}$.

4. Αν η νέα προσέγγιση είναι ικανοποιητική, πηγαίνουμε στο βήμα 6.
5. Θέτουμε $x_0 \leftarrow x_1, x_1 \leftarrow x_2, x_2 \leftarrow x_3$. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία από το βήμα 2.
6. Τέλος.

Προσέξτε ότι όλες οι μεταβλητές είναι μιγαδικές.

Σταθερό σημείο συνάρτησης (1/3)

Ορισμός

Μια συνάρτηση $g(x)$ λέμε ότι έχει σταθερό σημείο στο διάστημα $[a, b]$ αν υπάρχει $\rho \in [a, b]$ ώστε $g(\rho) = \rho$. Το ρ είναι το σταθερό σημείο.

Κριτήριο ύπαρξης σταθερού σημείου

Έστω $g(x)$ συνεχής συνάρτηση στο $[a, b]$, με $a \leq g(x) \leq b$, $\forall x \in [a, b]$. Τότε η $g(x)$ έχει τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο στο $[a, b]$.

Απόδειξη

- Ισχύει $g(a) \geq a$, $g(b) \leq b$.
- Ορίζουμε τη συνεχή συνάρτηση $h(x) = g(x) - x$. Τότε $h(a) \geq 0$, $h(b) \leq 0$.
- Το θεώρημα Bolzano εξασφαλίζει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho \in [a, b]$ ώστε $h(\rho) = g(\rho) - \rho = 0$.

Μοναδικότητα σταθερού σημείου

Μπορεί να αποδειχθεί ότι το σταθερό σημείο μιας συνάρτησης $g(x)$ (η οποία ικανοποιεί το κριτήριο ύπαρξης) είναι μοναδικό αν $|g'(x)| < 1$, $\forall x \in [a, b]$. Τότε, οποιαδήποτε αρχική τιμή στο $[a, b]$ δίνει ακολουθία που συγκλίνει σε αυτό.

Σταθερό σημείο συνάρτησης: (2/3)

- Έστω μια συνάρτηση $g(x)$ που είναι συνεχής σε σημείο \bar{x} , δηλαδή ικανοποιεί τη σχέση

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} g(x) = g(\lim_{x \rightarrow \bar{x}} x) = g(\bar{x}) .$$

- Επιλέγουμε μια αρχική τιμή x_0 στο πεδίο ορισμού της.
Κατασκευάζουμε την ακολουθία $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ ως εξής:

$$x_1 = g(x_0), \quad x_2 = g(x_1), \quad x_3 = g(x_2), \quad , \dots, \quad x_n = g(x_{n-1}) .$$

- Αν η ακολουθία συγκλίνει σε ένα σημείο ρ , δηλαδή,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \rho ,$$

τότε

$$\rho \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_{n-1}) = g(\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1}) \equiv g(\rho) .$$

Άρα, η $g(x)$ έχει σταθερό σημείο το $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \rho$.

Σταθερό σημείο συνάρτησης: (3/3)

Αλγόριθμος υπολογισμού σταθερού σημείου της $g(x)$

1. Θέτουμε στο x την αρχική προσέγγιση του σταθερού σημείου.
2. Ελέγχουμε αν η προσέγγιση είναι ικανοποιητική με τουλάχιστον ένα από τα κριτήρια (με ε κατάλληλα μικρή τιμή)

$$|x - g(x)| < \varepsilon ,$$

$$\left| \frac{x_i - x_{i-1}}{x_i} \right| < \varepsilon ,$$

$$|x_i - x_{i-1}| < \varepsilon .$$

Αν ναι, πηγαίνουμε στο βήμα 4.

3. Θέτουμε $x \leftarrow g(x)$ και επαναλαμβάνουμε από το βήμα 2.
4. Τέλος.

Μέθοδος Σταθερού Σημείου $x = g(x)$

Κατάλληλη μετατροπή της εξίσωσης $f(x) = 0$ σε $x = g(x)$ ανάγει το πρόβλημα εντοπισμού ρίζας της $f(x)$ σε πρόβλημα εύρεσης σταθερού σημείου της $g(x)$.

Παράδειγμα

Έστω $f(x) = x^2 - 6x + 5$. Γνωρίζουμε ότι έχει ρίζες τα 1, 5. Ας δούμε κάποιες μετατροπές της εξίσωσης $f(x) = 0$:



$$x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{x^2 + 5}{6}.$$

Παρατηρούμε ότι $|g'(x)| < 1$ όταν $-3 < x < 3$. Για αυτά τα x , $5/6 < g(x) < 14/6$, άρα $g(x) \in (-3, 3)$. Επομένως, υπάρχει μοναδικό σταθερό σημείο στο $(-3, 3)$. Οποιαδήποτε αρχική τιμή $|x| < 3$ (αλλά όχι μόνο) δίνει ακολουθία που συγκλίνει σε αυτό (στο 1). Μόνο τα ± 5 οδηγούν στη ρίζα 5. Με $|x| > 5$ αποκλίνει.

Μέθοδος Σταθερού Σημείου $x = g(x)$

Παράδειγμα (συνέχεια)



$$x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{6x - 5} .$$

Όταν $x > 7/3$ έχουμε $|g'(x)| < 1$ και $g(x) > 3 > 7/3$. Για οποιοδήποτε άνω όριο $b \geq 5$ του x , $g(x) \leq x \leq b$. Άρα, στο $(7/3, b]$ με $b \geq 5$, υπάρχει ένα μόνο σταθερό σημείο. Οποιαδήποτε αρχική τιμή μεγαλύτερη του $7/3$ οδηγεί στη ρίζα 5. Μόνο το 1 καταλήγει στη ρίζα 1.

Άλλες επιλογές της $g(x)$

$$g(x) = \frac{5}{6-x} ,$$

$$g(x) = 6 - \frac{5}{x} ,$$

$$g(x) = x(x^2 + 6x - 6) ,$$

\vdots \vdots

Μέθοδος Newton–Raphson (1/3)

Η Μέθοδος Newton–Raphson για την επίλυση της $f(x) = 0$ βασίζεται στο *Θεώρημα Taylor*.

Θεώρημα Taylor

Έστω ότι η συνάρτηση $f(x)$, με $x \in [a, b]$, έχει παραγώγους μέχρι τάξης $n + 1$ και η $f^{(n+1)}(x)$ είναι συνεχής στο $[a, b]$. Αν $x_0 \in [a, b]$, τότε υπάρχει ξ μεταξύ των x_0, x ώστε

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots \\ &\quad + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}. \end{aligned}$$

Μέθοδος Newton–Raphson (2/3)

Έστω ότι η $f(x)$ είναι συνεχής και διαφορίσιμη σε διάστημα $[a, b]$. Έστω ότι η ρίζα σε αυτό είναι η \bar{x} και γνωρίζουμε την τιμή αυτής και των παραγώγων της σε κάποιο σημείο $x_0 \in [a, b]$. Το ανάπτυγμα Taylor της $f(\bar{x})$ είναι

$$f(\bar{x}) = f(x_0) + f'(x_0)(\bar{x} - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(\bar{x} - x_0)^2 ,$$

όπου ξ μεταξύ \bar{x}, x_0 .

Αγνοώντας τον όρο του υπολοίπου, θεωρώντας ότι η απόσταση $|\bar{x} - x_0|$ είναι μικρή, και καθώς ισχύει ότι $f(\bar{x}) = 0$, έχουμε

$$0 \approx f(x_0) + f'(x_0)(\bar{x} - x_0) \Rightarrow \bar{x} \approx x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} .$$

Μέθοδος Newton–Raphson (3/3)

Καταλήξαμε ότι η συνάρτηση $g(x) = x - f(x)/f'(x)$ μπορεί να παραγάγει επαναληπτικά την εξής ακολουθία διαδοχικών προσεγγίσεων στη ρίζα (αρκεί να έχουμε $f'(x_n) \neq 0$):

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι η ακολουθία αυτή συγκλίνει αν η $f(x)$ είναι συνεχής και τουλάχιστον δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[a, b]$, με συνεχή τη δεύτερη παράγωγό της.

Παρατηρήσεις

- σε κάθε επανάληψη πρέπει να υπολογίσουμε τις τιμές δύο συναρτίσεων ($f(x), f'(x)$).
- Η ακρίβεια της μεθόδου, $\varepsilon_n \equiv |x_n - \bar{x}|$, δείχνεται εύκολα ότι είναι

$$\varepsilon_{n+1} = \left| \frac{f''(\xi)}{2f'(x_n)} \right| \varepsilon_n^2,$$

με ξ μεταξύ των x_n και \bar{x} . Επομένως, η μέθοδος είναι γενικά **δεύτερης τάξης**.

Ρίζα με πολλαπλότητα m

Το \bar{x} είναι ρίζα της $f(x)$ με πολλαπλότητα m όταν

$$f(\bar{x}) = f'(\bar{x}) = \dots = f^{(m-1)}(\bar{x}) = 0 ,$$

με $f^{(m)}(\bar{x}) \neq 0$.

Σε πολλαπλή ρίζα η μέθοδος Newton–Raphson έχει γραμμική σύγκλιση. Πώς μπορεί να επανέλθει η τετραγωνική σύγκλιση;

Α' τρόπος

Αναζητούμε ρίζα της $f^{(m-1)}(x) = 0$ καθώς σε αυτή το \bar{x} είναι απλή ρίζα. Απαιτείται όμως υπολογισμός παραγώγου υψηλής τάξης.

Μέθοδοι Newton–Raphson για ρίζες με πολλαπλότητα (2/2)

Β' τρόπος

Η συνάρτηση $f(x)$ με ρίζα το \bar{x} , πολλαπλότητας m , πάντα μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$f(x) = (x - \bar{x})^m g(x),$$

όπου $g(x)$ συνάρτηση για την οποία το \bar{x} δεν είναι ρίζα.

Επομένως, η συνάρτηση $h_1(x) = \sqrt[m]{f(x)}$ έχει απλή ρίζα το \bar{x} .

Ο τύπος Newton–Raphson για την $h_1(x)$ έχει τετραγωνική σύγκλιση.

Καταλήγει στον επαναληπτικό τύπο

$$x_{n+1} = x_n - m \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Γ' τρόπος

Εύκολα δείχνεται ότι η συνάρτηση $h_2(x) = f(x)/f'(x)$ έχει απλή ρίζα το \bar{x} .

Η εφαρμογή του τύπου Newton–Raphson καταλήγει στον

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)f'(x_n)}{[f'(x_n)]^2 - f(x_n)f''(x_n)}.$$

Μέθοδος Halley

- Έστω ότι η συνάρτηση $f(x)$ έχει απλές ρίζες σε κάποιο διάστημα, δεν μηδενίζονται δηλαδή ταυτόχρονα οι $f(x)$, $f'(x)$. Τότε οι συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x) = f(x)/\sqrt{|f'(x)|}$ έχουν τις ίδιες ρίζες.
- Η εφαρμογή της μεθόδου Newton–Raphson για την εύρεση ρίζας της $g(x)$ δίνει

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} = x_n - \frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2[f'(x_n)]^2 - f(x_n)f''(x_n)} .$$

- Μπορεί ναδειχθεί ότι η μέθοδος είναι τρίτης τάξης.

Οικογένεια μεθόδων Householder

- Οι μέθοδοι εφαρμόζονται για την εύρεση ρίζας μιας συνάρτησης με συνεχείς παραγώγους τουλάχιστον μέχρι την τάξη $d + 1$.
- Είναι επαναληπτικές, με τάξη σύγκλισης $d + 1$.
- Η γενική σχέση που παράγει την ακολουθία x_0, x_1, x_2, \dots είναι

$$x_{n+1} = x_n + d \frac{(1/f)^{(d-1)}(x_n)}{(1/f)^{(d)}(x_n)},$$

και για να ξεκινήσει χρειάζεται μια αρχική προσέγγιση x_0 .

- Ο γενικός τύπος για $d = 1$ καταλήγει στον τύπο Newton–Raphson. Για $d = 2$ δίνει τον τύπο Halley.

