Προχωρημενος Προγραμματισμος Ι: Εισαγωγη στη C++

Θέματα Εξετάσεων Ιανουαρίου 2007

1. (α΄) Γράψτε υποπρόγραμμα που να αναζητεί μια συγκεκριμένη τιμή σε μονοδιάστατο πίνακα οποιουδήποτε τύπου. Το υποπρόγραμμα θα δέχεται ως ορίσματα τον πίνακα, ίσως τη διάστασή του αν χρειάζεται, καθώς και τη ζητούμενη τιμή και θα επιστρέφει τη **θέση** του πρώτου στοιχείου που έχει τιμή ίση με τη ζητούμενη ή -1 αν αυτή δε βρεθεί.

   (β΄) Γράψτε υποπρόγραμμα που να υπολογίζει το πλήθος των στοιχείων ενός μονοδιάστατου πίνακα (οποιουδήποτε τύπου) που είναι κατ΄ απόλυτη τιμή μεγαλύτερα από μια δεδομένη τιμή. Το υποπρόγραμμα θα δέχεται ως ορίσματα τον πίνακα και τη συγκεκριμένη τιμή και θα επιστρέφει το ζητούμενο πλήθος.

   (γ΄) Γράψτε υποπρόγραμμα που να εντοπίζει σε μονοδιάστατο πίνακα οποιουδήποτε τύπου, τις 8 τιμές που είναι αριθμητικά πιο κοντά, και από τις δύο κατευθύνσεις, σε ένα δεδομένο αριθμό.

   (δ΄) Γράψτε υποπρόγραμμα που να εντοπίζει τις 6 μεγαλύτερες τιμές σε μονοδιάστατο πίνακα οποιουδήποτε αριθμητικού τύπου (με τουλάχιστον 6 στοιχεία).

   (ε΄) Γράψτε υποπρόγραμμα που να εντοπίζει τις 6 μικρότερες τιμές σε μονοδιάστατο πίνακα οποιουδήποτε αριθμητικού τύπου (με τουλάχιστον 6 στοιχεία).

   Υπόδειξη: Επιλέξτε κατάλληλους αλγορίθμους της STL.

   Παρατήρηση: Μια "εύκολη" λύση για τα (δ), (ε), είναι η πλήρης ταξινόμηση του πίνακα και κατόπιν η "επιστροφή" των 6 πρώτων ή τελευταίων στοιχείων. *Να αποφύγετε* αυτήν τη μέθοδο καθώς απαιτεί πολλές περιττές (και ίσως χρονοβόρες) πράξεις. Υπάρχουν καλύτερες λύσεις.

2. Η μέθοδος Cramer προσδιορίζει τη λύση του γραμμικού συστήματος

$$A_{n\times n}x_{n\times 1} = b_{n\times 1}$$

   όπου

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} , \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} , \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} ,$$

   ως εξής:

$$x_j = \frac{\det B_j}{\det A} , \qquad j = 1, 2, \ldots, n ,$$

   όπου ο πίνακας B_j προκύπτει από τον A αν αντικαταστήσουμε την j-στήλη του με το διάνυσμα b.

Έστω ότι έχετε διαθέσιμη[1] τη ρουτίνα με την ακόλουθη δήλωση

```
double determinant(std::vector<double> const & v, int N);
```

Η συνάρτηση αυτή δέχεται ως πρώτο όρισμα (v) έναν μαθηματικό πίνακα A με πραγματικά στοιχεία και ως δεύτερο (N) τη διάστασή του. Τα στοιχεία του A αποθηκεύονται στο v ως εξής: $a_{ij} \to v[i+j*N]$. Η συνάρτηση επιστρέφει την ορίζουσα του πίνακα A.

Γράψτε συνάρτηση της C++ η οποία να δέχεται ένα τετραγωνικό πίνακα A και ένα διάνυσμα-στήλη b, και να επιστρέφει σε τρίτο όρισμα x τη λύση του συστήματος $Ax = b$ εφαρμόζοντας τη μέθοδο Cramer. Εφαρμόστε την για να υπολογίσετε τη λύση του συστήματος

$$\begin{bmatrix} 2.1 & 3.9 & 0.3 & -4.1 \\ 4.3 & -1.3 & 0.8 & 1.5 \\ 1.0 & -2.8 & 4.3 & -8.1 \\ 2.4 & 6.1 & -1.1 & 12.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 2.5 \\ -0.9 \\ 4.1 \end{bmatrix} .$$

3. Η κβαντομηχανική αντιμετώπιση του ατόμου του Υδρογόνου καταλήγει στις ιδιοσυναρτήσεις (σε σφαιρικές συντεταγμένες)

$$\psi_{n\ell m}(r,\theta,\phi) = R_{n\ell}(r) Y_{\ell m}(\theta,\phi) .$$

Το γωνιακό τμήμα τους είναι οι *σφαιρικές αρμονικές*, (μιγαδικές συναρτήσεις)

$$Y_{\ell m}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\, P_\ell^m(\cos\theta) \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi} .$$

Τα *συναφή πολυώνυμα Legendre*, $P_\ell^m(x)$, με ℓ, m ακέραια, ικανοποιούν τις σχέσεις

- αν $\ell = m$

$$P_\ell^m(x) = (-1)^m \times 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2m-1) \times (1-x^2)^{m/2} ,$$

- αν $\ell = m+1$

$$P_\ell^m(x) = x(2m+1) P_m^m(x) ,$$

- ενώ σε άλλη περίπτωση δίνονται από την αναδρομική σχέση

$$(\ell - m) P_\ell^m(x) = x(2\ell-1) P_{\ell-1}^m(x) - (l+m-1) P_{\ell-2}^m(x) .$$

Οι γωνίες θ και ϕ μεταβάλλονται στα διαστήματα $[0,\pi]$ και $[0,2\pi)$ αντίστοιχα.

- Γράψτε συνάρτηση που να υπολογίζει το παραγοντικό ενός μικρού ακεραίου.
- Γράψτε συνάρτηση που να υπολογίζει το γινόμενο $1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2m-1)$ (διπλό παραγοντικό) για μικρό ακέραιο m.
- Γράψτε συνάρτηση που να υπολογίζει το συναφές πολυώνυμο Legendre, $P_\ell^m(x)$.

[1] Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τον κώδικα στο `http://www.materials.uoc.gr/~tetycpp/node10.html`

- Γράψτε συνάρτηση που να υπολογίζει τη σφαιρική αρμονική, $Y_{\ell m}(\theta, \phi)$.
- Δημιουργήστε ένα καρτεσιανό πλέγμα 50×100 σημείων στο επίπεδο $\theta - \phi$ και υπολογίστε σε καθένα από αυτά τις τιμές των $Y_{\ell m}(\theta, \phi)$. Τυπώστε στο αρχείο "ylm_data" τις τιμές $\sin\theta\cos\phi$, $\sin\theta\sin\phi$, $\cos\theta$, $Y_{\ell m}(\theta, \phi) Y^*_{\ell m}(\theta, \phi)$ (δηλαδή, ουσιαστικά, τα $x, y, z, \psi\psi^*$) για κάθε σημείο, με $\ell = 2$, $m = 0$ (δηλαδή, ένα από τα d-τροχιακά).