Προχωρημενος Προγραμματισμος Ι : Εισαγωγη στη C++

Θέματα Εξετάσεων Ιανουαρίου 2008

1. Η συνάρτηση Bessel πρώτου είδους, ακέραιας τάξης n, $J_n(x)$, μπορεί να οριστεί ως εξής

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n} .$$

Να τυπώσετε στο αρχείο "bessel.dat" τις τιμές των συναρτήσεων $J_0(x)$, $J_1(x)$, $J_2(x)$ σε 150 ισαπέχοντα σημεία x στο διάστημα $[0, 20]$. Το αρχείο θα έχει σε κάθε γραμμή τις τιμές

$$x \qquad J_0(x) \qquad J_1(x) \qquad J_2(x)$$

Υπόδειξη Ι: Στο άθροισμα δεν μπορούμε, φυσικά, να πάρουμε άπειρους όρους. Να σταματήσετε τον υπολογισμό του στον πρώτο όρο που κατ' απόλυτη τιμή είναι μικρότερος από 10^{-12}.

Υπόδειξη ΙΙ: Παρατηρήστε ότι ο κάθε όρος στο άθροισμα προκύπτει από τον προηγούμενό του με πολλαπλασιασμό κατάλληλης ποσότητας. Μπορεί να σας βοηθήσει.

2. Η στροφή ενός τριδιάστατου διανύσματος $\vec{r} = (x, y, z)$ κατά γωνία θ γύρω από τον άξονα $\hat{x}$, μπορεί να αναπαρασταθεί με τον πολλαπλασιασμό του διανύσματος $\vec{r}$ με τον πίνακα

$$R_x(\theta) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} ,$$

δηλαδή, το στραμμένο διάνυσμα έχει συνιστώσες

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} .$$

Οι πίνακες στροφής γύρω από τους άξονες $\hat{y}$, $\hat{z}$ είναι αντίστοιχα οι

$$R_y(\theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{vmatrix} \text{ και } R_z(\theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} .$$

(α') Να γράψετε τρία υποπρογράμματα· το καθένα από αυτά θα εκτελεί τη στροφή γύρω από έναν άξονα. Κάθε υποπρόγραμμα θα δέχεται ως ορίσματα 1) τη γωνία στροφής θ και 2) ένα διάνυσμα, οι συνιστώσες του οποίου θα τροποποιούνται.

(β') Να γράψετε υποπρογράμματα που θα υπολογίζουν το μέτρο ενός διανύσματος και τη γωνία μεταξύ δύο διανυσμάτων.

(γ) Να γράψετε πρόγραμμα που θα χρησιμοποιεί τα παραπάνω για να κάνετε τα εξής:

   i. Δημιουργήστε ένα διάνυσμα με συνιστώσες $x = 0.5$, $y = -0.3$, $z = 1.2$. Να το στρέψετε διαδοχικά κατά γωνία $30°$ γύρω από τον άξονα $\hat{y}$, κατόπιν κατά γωνία $35°$ γύρω από τον άξονα $\hat{x}$, και τέλος κατά γωνία $58°$ γύρω από τον άξονα $\hat{z}$. Τυπώστε στην οθόνη τις τελικές συνιστώσες.

   ii. Υπολογίστε και τυπώστε στην οθόνη τα μέτρα του αρχικού και του τελικού (μετά τις στροφές) διανύσματος καθώς και τη μεταξύ τους γωνία.

3. Γράψτε συνάρτηση της C++ που να υπολογίζει την τιμή των πολυωνύμων Hermite, $H_n(x)$. Τα πολυώνυμα αυτά δίνονται από την αναδρομική σχέση:

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0$$

   με $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$.

   Η κβαντομηχανική αντιμετώπιση του μονοδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή (μάζα m σε δυναμικό $V = kx^2/2$) καταλήγει στις ιδιοσυναρτήσεις (χωρικό τμήμα)

$$\psi_n(y) = \sqrt{\frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(y) \mathrm{e}^{-y^2/2} \ ,$$

   όπου $y = x\sqrt{\sqrt{km}/\hbar}$.

   Να τυπώσετε στο αρχείο "harmonic.dat" τις τιμές της πυκνότητας πιθανότητας ($\psi\psi^*$) για $n = 5$ σε 60 ισαπέχοντα σημεία x στο διάστημα $[-6:6]$, μαζί με τα αντίστοιχα σημεία x (δηλαδή το αρχείο θα περιέχει δύο στήλες, x και $\psi\psi^*$).

   Θεωρήστε ότι $k = m = \hbar = 1$.