Προχωρημενος Προγραμματισμος Ι : Εισαγωγη στη C++

Θέματα Εξετάσεων Σεπτεμβρίου 2009

1. Ανάστροφος ενός πίνακα A είναι ο πίνακας A^T για τα στοιχεία του οποίου ισχύει
$$A^T_{ij} = A_{ji} \; .$$
Ένας πίνακας A με πραγματικά στοιχεία λέγεται ορθογώνιος όταν ο α-νάστροφός του είναι και αντίστροφός του, δηλαδή ισχύει
$$AA^T = A^T A = I \; .$$
Να δείξετε με κατάλληλο πρόγραμμα ότι ο πίνακας
$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{2\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
είναι ορθογώνιος. Επομένως:

   - Γράψτε συνάρτηση που να δέχεται ένα πίνακα πραγματικών και να επιστρέφει τον ανάστροφό του,
   - Γράψτε άλλη συνάρτηση που να δέχεται δύο πίνακες και να υπολογίζει το γινόμενό τους,
   - Χρησιμοποιήστε τις προηγούμενες συναρτήσεις για να υπολογίσετε τα γινόμενα AA^T, $A^T A$ για τον πίνακα που σας δόθηκε. Να τυπώσετε στην οθόνη τους δύο πίνακες που προκύπτουν (και οι δύο θα πρέπει να είναι ο μοναδιαίος). Τα στοιχεία τους να τυπωθούν με 5 δεκαδικά ψηφία.

2. Ένας τρόπος να σχεδιάσουμε ένα διδιάστατο fractal είναι ο εξής: ξεκινάμε από ένα σημείο του επιπέδου, έστω το ($x = 0$, $y = 0$), και το μετακινούμε στη θέση (x', y') όπου
$$\begin{aligned} x' &= a \cdot x + b \cdot y + e \\ y' &= c \cdot x + d \cdot y + f \end{aligned}$$
και a, b, c, d, e, f σταθερές.
Το νέο σημείο το μεταφέρουμε με τον ίδιο μετασχηματισμό στο επόμενο σημείο του fractal (δηλαδή, θέτουμε $x' \to x$ και $y' \to y$ και παράγουμε

το νέο (x', y')). Τη διαδικασία αυτή την επαναλαμβάνουμε επ' άπειρο. Η ακολουθία των σημείων (x, y) που παράγονται, αποτελεί το fractal.

Γράψτε ένα πρόγραμμα το οποίο:

(α') θα διαβάζει από το αρχείο "in.dat" 4 γραμμές. Σε κάθε γραμμή θα υπάρχουν 7 πραγματικοί αριθμοί: οι 6 πρώτοι αντιστοιχούν στους συντελεστές a, b, c, d, e, f και ο τελευταίος στην πιθανότητα p να γίνει ο συγκεκριμένος μετασχηματισμός. Κάθε γραμμή αντιστοιχεί σε άλλο μετασχηματισμό. Το άθροισμα των πιθανοτήτων, $\sum p_i$, όλων των μετασχηματισμών είναι 1.

(β') Θα επιλέγει ένα τυχαίο πραγματικό αριθμό r στο διάστημα $[0, 1)$. Ανάλογα με την τιμή του θα εφαρμόζεται διαφορετικός μετασχηματισμός. Δηλαδή, αν ισχύει $0 \leq r < p_1$ θα εκτελείται ο πρώτος μετασχηματισμός, αν ισχύει $p_1 \leq r < p_1 + p_2$ θα εκτελείται ο δεύτερος κλπ.

(γ') θα επαναλαμβάνει το προηγούμενο βήμα 1000 φορές σώζοντας κάθε φορά το σημείο που προκύπτει στο αρχείο "fractal.dat".

Δοκιμάστε το πρόγραμμά σας με τις εξής παραμέτρους στο "in.dat"

0	0	0	0.16	0	0	0.01
0.85	0.04	−0.04	0.85	0	1.6	0.85
0.2	−0.26	0.23	0.22	0	1.6	0.07
−0.15	0.28	0.26	0.24	0	0.44	0.07

και

0	0	0	0.25	0	−0.4	0.02
0.95	0.005	−0.005	0.93	−0.002	0.5	0.84
0.035	−0.2	0.16	0.04	−0.09	0.02	0.07
−0.04	0.2	0.16	0.04	0.083	0.12	0.07

Αν θέλετε, μπορείτε να σχεδιάσετε τα "fractal.dat" που προκύπτουν.

3. Γράψτε συνάρτηση της C++ που να υπολογίζει την τιμή των πολυωνύμων Hermite, $H_n(x)$. Τα πολυώνυμα αυτά δίνονται από την αναδρομική σχέση:

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0$$

με $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$.

Η κβαντομηχανική αντιμετώπιση του μονοδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή (μάζα m σε δυναμικό $V = kx^2/2$) καταλήγει στις ιδιοσυναρτήσεις (χωρικό τμήμα)

$$\psi_n(y) = \sqrt{\frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(y) \mathrm{e}^{-y^2/2} , \tag{1}$$

όπου $y = x\sqrt{\sqrt{km}/\hbar}$. Χρησιμοποιείστε τη συνάρτηση που γράψατε για τα πολυώνυμα Hermite για να υπολογίσετε την πυκνότητα πιθανότητας ($\psi\psi^*$) της κυματοσυνάρτησης [1]. Θα γράψετε μια νέα συνάρτηση για αυτό που θα δέχεται ως ορίσματα τα n, x. Θεωρήστε ότι $m = k = \hbar = 1$.

Να τυπώσετε στο αρχείο "harmonic.dat" τις τιμές της πυκνότητας πιθανότητας για $n = 5$ σε 60 ισαπέχοντα σημεία x στο διάστημα $[-6 : 6]$, μαζί με τα αντίστοιχα σημεία x (δηλαδή το αρχείο θα περιέχει δύο στήλες, x και $\psi\psi^*$).