ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3$^{\text{Ο}}$

3. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΙΞΩΔΟΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ

Εχοντας συζητήσει τις περιπτώσεις των καθαρά ελαστικών και ιξώδων σωμάτων, μπορούμε να εξετάσουμε τώρα πιο πολύπλοκες περιπτώσεις. Περιπτώσεις που τα ρευστά συμπεριφέρονται μεταξύ των δύο αυτών ακραίων περιπτώσεων, κάτι που εξαρτάται από το χαρακτηριστικό χρόνο της διεργασίας. Με άλλα λόγια, θα εξετάσουμε το γενικό γραμμικό ιξωδοελαστικό σώμα.

Πριν κάνουμε αυτό, πρώτα θα συζητήσουμε μερικές εισαγωγικές έννοιες. Ειδικά θα συζητήσουμε το μέτρο παραμόρφωσης για απλό εφελκυσμό και διάτμηση ή εφελκυστική και διατμητική παραμόρφωση (elongational and shear strains). Ηδη έχουμε συζητήσει μερικά πιό πολύπλοκα μέτρα παραμόρφωσης σε προηγούμενα κεφάλαια π.χ. τους τανυστές Finger και Cauchy. Αυτοί οι τανυστές θα χρησιμοποιηθούν για να γενικεύσουμε μερικές μαθηματικές σχέσεις που θα αναπτύξουμε στο παρόν κεφάλαιο.

3.1. ΜΕΤΡΑ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗΣ ΓΙΑ ΑΠΛΟ ΕΦΕΛΚΥΣΜΟ

Θεωρούμε το πείραμα απλού εφελκυσμού όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.1.

Σχήμα 3.1*.Απλός εφελκυσμός ενός στοιχείου*

Η εφελκυστική τάση (tensile stress) σ΄αυτό το πείραμα ορίζεται ως:

$$\sigma_E = \frac{stretching \quad force}{cross \quad sectional \quad area} = \frac{F}{A}$$

Η γραμμική παραμόρφωση για απλό εφελκυσμό ορίζεται ως:

$$S = \frac{L - L_0}{L_0}$$

Εαν το αρχικό μήκος στο χρόνο t_0 ενος στοιχείου του υλικού στην κατεύθυνση εφελκυσμού είναι $\delta X_1(t)$ και το μήκος σε ένα μετέπειτα χρόνο, t, είναι $\delta X_1(t)$, η γραμμική παραμόρφωση μπορεί να γραφεί ως:

$$S = \frac{\delta X_1(t) - \delta X_1(t_0)}{\delta X_1(t_0)}$$

Αυτό το μέτρο παραμόρφωσης παρέχει μερικές διευκολύνσεις.

- Είναι ανεξάρτητο από το μέγεθος του δείγματος (independent of sample size)
- Είναι μηδέν στην αρχική κατάσταση ισορροπίας (unstressed, initial state)

Ενα άλλο μέτρο παραμόρφωσης είναι το μέτρο παραμόρφωσης του Hencky που ορίζεται ως:

$$\varepsilon = \ln\left(\frac{\delta X_1(t)}{\delta X_1(t_0)}\right)$$

Για ένα δείγμα με αρχικό μήκος L_0, αυτό μπορεί να γραφεί ως:

$$\varepsilon = \ln\left(\frac{L}{L_0}\right)$$

Για πολύ μικές παραμορφώσεις, S και ε είναι ισοδύναμα ποσότητες.

Ο ρυθμός παραμόρφωσης του Hencky (strain rate) είναι επίσης μία χρήσιμη ποσότητα για την περιγραφή ρεολογικών φαινομένων σε απλό εφελκυσμό. Αυτός ορίζεται ως:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{d \ln(L)}{dt}$$

Παρατηρούμε ότι το αρχικό μήκος του δείγματος δεν εμφανίζεται στον ρυθμό παραμόρφωσης του Hencky αλλά εμφανίζεται στο γραμμικό ρυθμό παραμόρφωσης dS/dt.

3.2. ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΗ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ (SHEAR STRAIN)

Θεωρούμε τώρα απλή διάτμηση. Αναφερόμενοι στο Σχήμα 3.2 η διατμητική παραμόρφωση ορίζεται ως:

$$\gamma = \frac{\Delta X}{h}$$

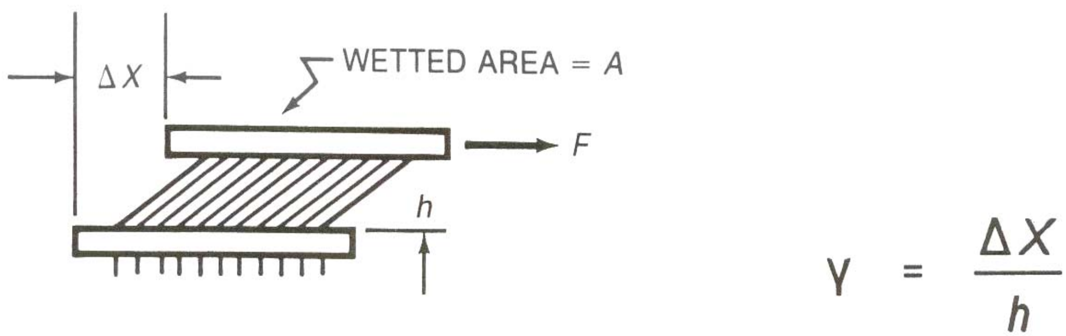
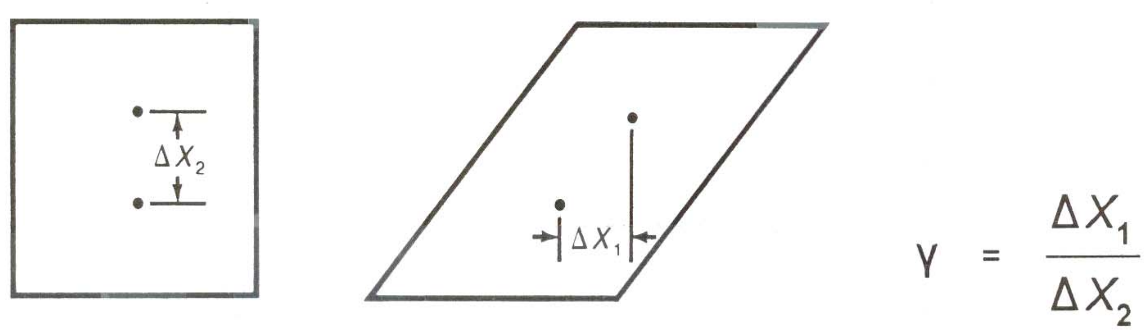


Figure 3-2*:* Απλή διάτμηση

Αναφέροντας σε δύο σωματίδια του υλικού στο Σχήμα 3.3, και όχι σε όλο το δείγμα, μπορούμε επίσης να ορίσουμε την διατμητική παραμόρφωση ως:

$$\gamma = \frac{\Delta X_1}{\Delta X_2}$$



Σχήμα 3.3.Παραμόρφωση σε απλή διάτμηση

Τελικά ο ρυθμός διάτμησης γι΄ αυτή τη ροή είναι:

$$\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{h}\frac{dX}{dt} = \frac{V}{h}$$

Όπου V έναι η ταχύτητα της κινούμενης πλάκας.

Εχοντας ορίσει τα μέτρα παραμόρφωσης και τους αντιστοιχους ρυθμούς σε διάτμηση και εφελκυσμό, μπορούμε να ορίσουμε την ελαστικότητα και ιξώδες με ευκολότερους όρους απ' ότι σε προηγούμενα κεφάλαια.

3.3. ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ (ELASTICITY): ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ ΧΟΥΚ (HOOKE)

Ελαστικότητα είναι ο τύπος συμπεριφοράς κατά την οποία ένα παραμορφωμένο σώμα επιστρέφει στην αρχική του κατάσταση όταν η τάση που προκαλεί την παραμόρφωση απομακρυνθεί/αποσυρθεί. Ετσι η ύπαρξη της τάσης είναι απαραίτητη για να προκαλέσει και να διατηρήσει την παραμόρφωση. Η απλούστερη συμπεριφορά λαμβάνεται όταν η τάση είναι ανάλογη με την παραμόρφωση. Αυτή η απλή συσχέτιση είναι ο νόμος του Χούκ (Hooke's law).

Για παράδειγμα σε απλό εφελκυσμό που απεικονίζεται στο Σχήμα 3-4, η εφελκυστική τάση είναι:

$$\sigma_E = E\,(L - L_0)/L_0 = E\,S$$

όπου E είναι το μέτρο ελαστικότητας του Young (Young modulus). Η αντίστοιχη μορφή του νόμου του Χούκ για την απλή διάτμηση που απεικονίζεται στο Σχήμα 3-2 είναι:

$$\tau = G\,\gamma$$

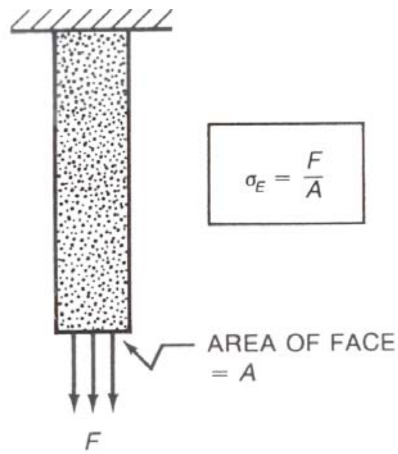
όπου G είναι το μέτρο διάτμησης (shear modulus or modulus of rigidity).

Υποσημαίνεται ότι για ένα καθαρά ελαστικό υλικό (purely elastic material), όλο το έργο που γίνεται για την παραμόρφωση του υλικού, αποθηκεύεται σαν ελαστική ενέργεια (stored as elastic energy) και μπορεί να ανακτηθεί όταν το υλικό επιτρέπεται να επανέλθει στην αρχική του κατάσταση (equilibrium configuration).

Ενας άλλος τρόπος για να περιγραφεί αυτή η συμπεριφορά είναι:

$$\gamma = J\,\tau$$

Όπου J είναι η διατμητική ενδοτικότητα (shear compliance). Προφανώς γα ένα τέτοιο υλικό J=1/G.



Σχήμα 3-4*: Απλός εφελκυσμός για τον ορισμό του νόμου του Χούκ (Hook's law).*

3.4. Ιξώδες (Viscosity)

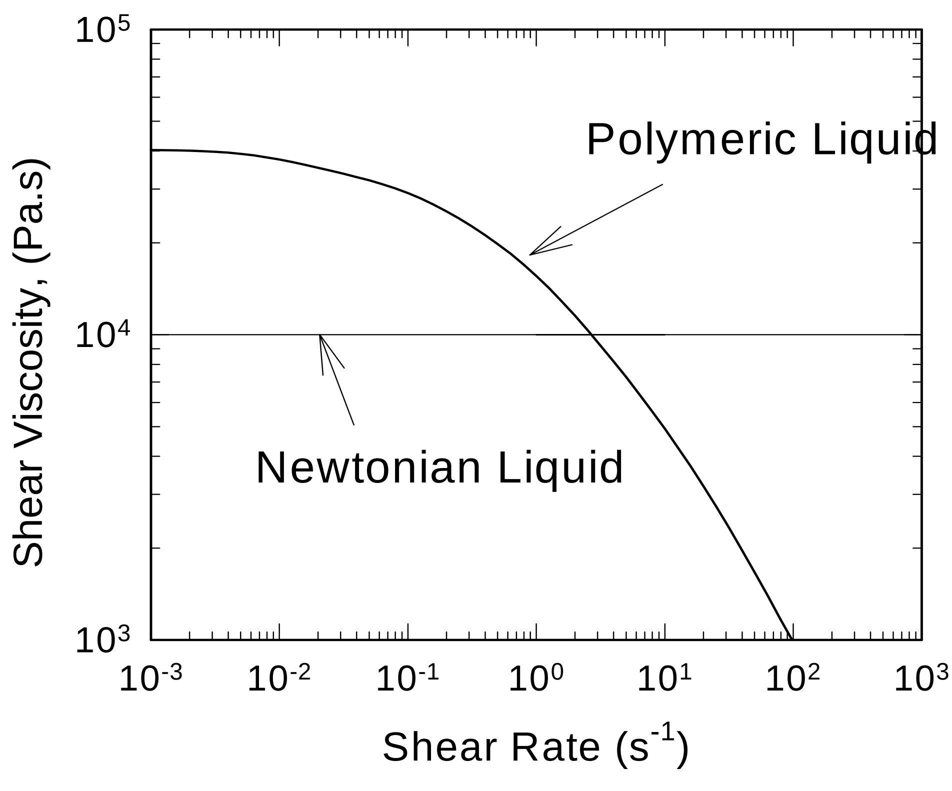
Ιξώδες είναι η ιδιότητα ενός υλικού που υποδηλώνει αντίσταση σε συνεχή παραμόρφωση (resistance to continuous deformation). Αντίθετα με την ελαστικότητα, η τάση δεν σχετίζεται με την παραμόρφωση αλλά με τον ρυθμό παραμόρφωσης.

Η απλούστερη ρεολογική συμπεριφορά περιγράφεται από την εξής σχέση:

$$\tau = \eta \dot{\gamma}$$

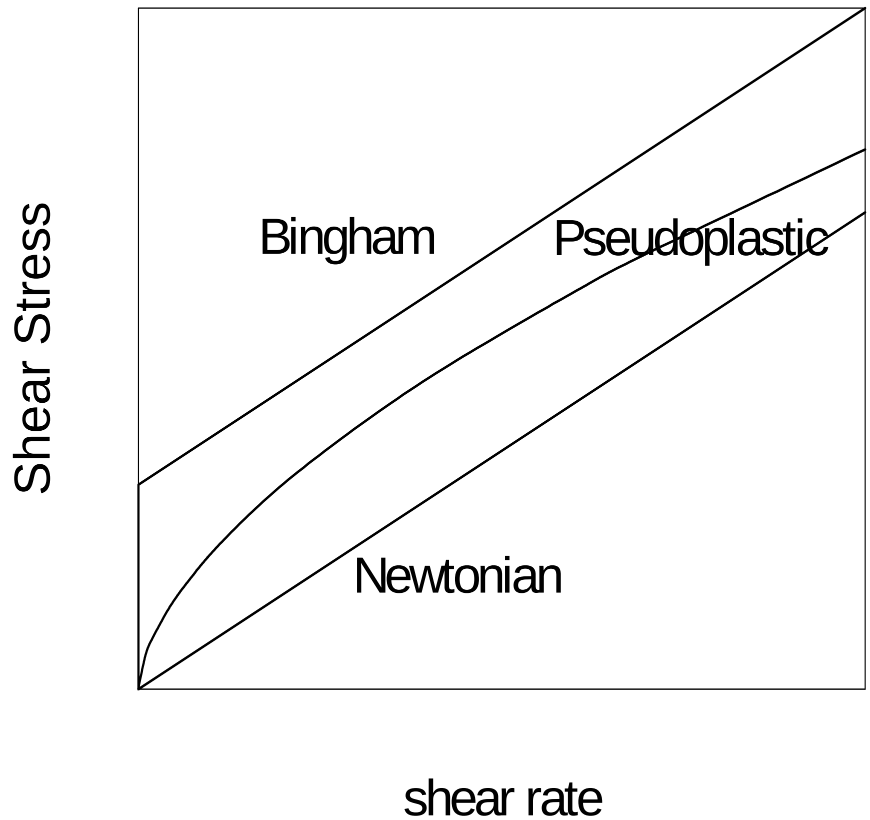
όπου η είναι το ιξώδες.

Το Σχήμα 3-5 συγκρίνει τυπικές καμπύλες ιξώδους ενός Νευτώνειου ρευστού και ενός πολυμερικού τήγματος.



Σχήμα 3-5: *Το ιξώδες ενός Νευτώνειου ρευστού και ενός τυπικού πολυμερικού τήγματος.*

Το Σχήμα 3-6 απεικονίζει διάφορους άλλους τύπους ρεολογικής συμπεριφοράς τις οποίες ήδη έχουμε συζητήσει από πριν. Σ΄αυτές τις περιπτώσεις η συμπεριφορά ορίζεται με σχέσεις μεταξύ διατμητικής τάσης και ρυθμού διάτμησης.



Σχήμα 3-6*:* Διάφοροι τύποι ρεολογικής συμπεριφοράς (Νευτώνειο ρευστό, ρευστό Bingham με την αντίστοιχη τάση ροής ή διαρροής (yield stress), και ψευδοπλαστική ή ρεολογική συμπεριφορά διατμητικής εκλέπτυνσης).

3.6. ΙΞΩΔΟΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ (VISCOELASTICITY)

Πολυμερικά υλικά (τήγματα και διαλύματα) και ελαστομερή (crosslinked elastomers), επιδεικνύουν ιξώδη αντίσταση σε παραμόρφωση (σκεδάζουν ενέργεια - dissipate energy) και ελαστικότητα (αποθηκεύουν ενέργεια - store energy).

Σε ένα ελαστομερές (vulcanised, crosslinked rubber), η ροή δεν ειναι δυνατή λόγω της ύπαρξης μόνιμων δεσμών μεταξύ γειτονικών μορίων. Εάν ένα τέτοιο υλικό παραμορφωθεί, θα επιστρέψει στην αρχική του κατάσταση όταν η τάση που προκάλεσε την παραμόρφωση αποσυρθεί.

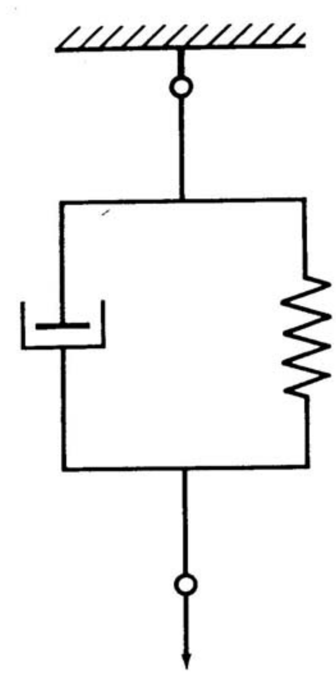
Σε ένα τέλειο ελαστικό σώμα, η εφαρμογή μίας τάσης θα επιφέρει μία ακαριαία παραμόρφωση (instantaneous strain). Ομως στην πραγματικότητα, η ιξώδης αντίσταση σε παραμόρφωση καθυστερεί την ανταπόκριση του ελαστικού υλικού στη αλλαγή τάσης.

Για να επεξηγήσουμε αυτή την συμπεριφορά, θεωρούμε το μηχανικό ανάλογο ενός ιξωδοελαστικού λάστιχου (ελαστομερούς - ***viscoelastic rubber*** **).** Αυτό απεικονίζεται στο Σχήμα 3-7.

- Το ελατήριο (spring) είναι ένα γραμμικό στοιχείο που παριστάνει ένα καθαρά ελαστικό σώμα που υπακούει τον νομο του Χούκ (Hook's law) – Χουκιανό σοιχείο, που σε μία διάσταση γράφεται ως $F = K_e X$.
- Το έμβολο ή αμορτισέρ (μηχανικό ανάλογο του αποσβέστη κραδασμών - dashpot) είναι ενα γραμμικό ιξώδες στοιχείο που υπακούει τον νόμο του Newton, που σε μία διάσταση γράφεται ως $F = K_v \, {dX}/{dt}$.

Αυτός ο συνδιασμός πάντα επιστρέφει στην αρχική του κατάσταση μετά από παραμορφώσεις, λόγω της ύπαρξης του ελατηρίου. Τα ποσοτικά χαρακτηριστικά της αναπόκρισης του συνδιασμού (γνωστό σαν Voigt element) σε αλλαγές δύναμης είναι όμοιες κατά κάποιο τρόπο με αυτές που συμβαίνουν σε ελαστομερή. Ας θεωρήσουμε τώρα πώς αυτός ο συνδιασμός θα ανταποκριθεί σε μία ξαφνική εφαρμογή μίας εφελκυστικής τάσης *F*. Η ολική δύναμη μπορεί να γραφεί σαν ένα άθροισμα των δυνάμεων που εξασκούνται στα δύο στοιχεία (γραμμικό ελατήριο και αμορτισέρ ή έμβολο):

$$F = K_e X + K_v \frac{dX}{dt}$$

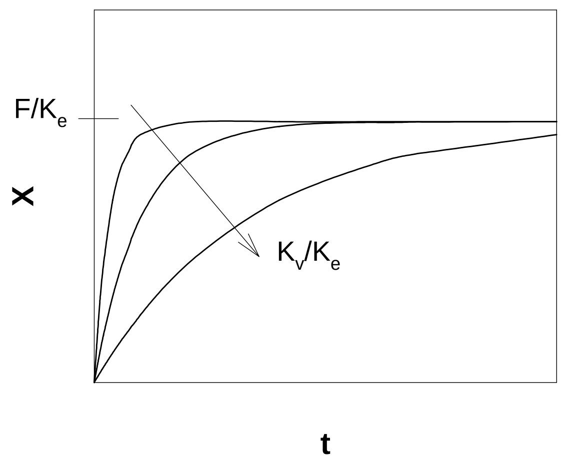


Σχήμα 3-7. Μηχανικό ανάλογο ενός γραμμικού ιξωδοελαστικού ελαστομερούς - *rubber (Voigt element)*.

Ολοκληρώνοντας αυτή την διαφορική εξίσωση με αρχική συνθήκη ότι: X=0 στον χρόνο t=0, τότε

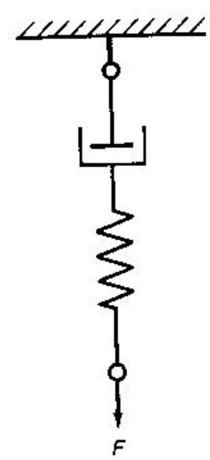
$$X(t) = \frac{F}{K_e} [1 - \exp(-K_e t / K_v)]$$

Από το σχήμα παρακάτω μπορούμε να δούμε ότι ένα ιξωδοελαστικό ελαστομερές έχει μια χρονική σταθερά (time constant) ίση με K_v/K_e , και ότι δεν μπορεί να παραμορφωθεί στιγμιαία. Αυτή η ανταπόκριση λέγεται καθυστερημένη ελαστική ανταπόκριση (retarded elastic response) και το πείραμα "creep" π.χ. εφαρμογή μίας σταθερής τάσης σε ένα υλικό και καταγραφή της παραμόρφωσης.



Σχήμα 3-8. Ανταπόκριση του μοντέλου *Voigt* σε εφαρμογή μίας σταθερής δύναμης F (creep).

Τώρα στρέφουμε την προσοχή μας στην ανταπόκριση ενός ελαστικού ρευστού (**elastic liquid**). Αυτό ποιοτικά μπορεί να απεικονιστεί με τον συνδιασμό δύο στοιχείων, του γραμμικού ελατηρίου και γραμμικού εμβόλου σε σειρά. Ο συνδιασμός αυτός είναι γνωστός σαν στοιχείο Maxwell. Σε αντίθεση με το στοιχείο Voigt, αυτό μπορεί να παραμορφωθεί απεριόριστα κάτω από την επίδραση μίας δύναμης π.χ., χαρακτηριστικό στοιχείο συμπεριφοράς ενός ρευστού.



Σχήμα 3-9.Μηχανικό ανάλογο ενός γραμμικού ελαστικού υγρού (στοιχείο Maxwell).

Τώρα εξετάζουμε την μεταβολή της δύναμης στο στοιχείο Maxwell όταν μία ξαφνική εφαλκυστικής παράμορφωσης (stretching) X_o εφαρμοσθεί στο υλικό. Η σχέση για την δύναμη μπορεί να γραφεί ως:

$$F = K_e X_e = K_v \frac{d X_v}{d t}$$

Πάλι επισημαίνουμε οτι μέρος του έργου για την παραμόρφωση σκεδάζεται (dissipation) στο έμβολο (dashpot) και το υπόλοιπο αποθηκεύεται στο ελατήριο. Η ολική μετακίνηση/παραμόρφωση (displacement) του στοιχείου, X_o, είναι το άθροισμα των X_e, και X_v:

$$X_o = X_e + X_v$$

Συνδιάζοντας:

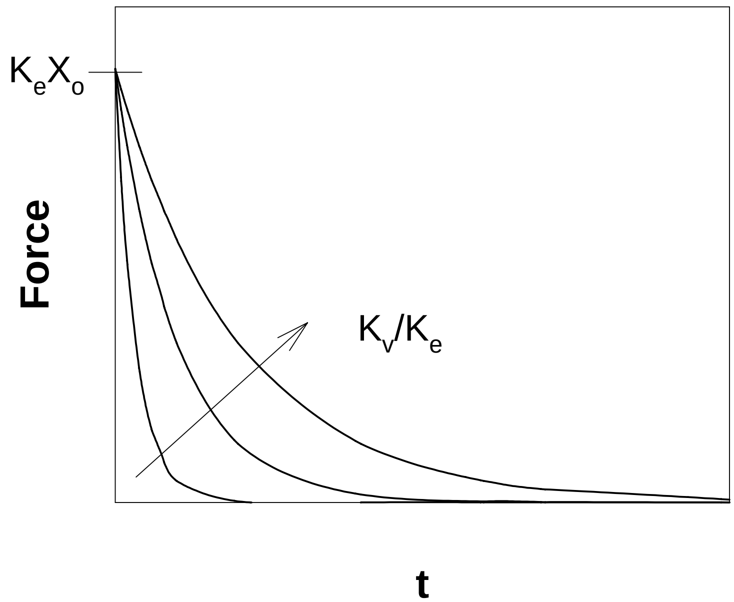
$$F(t) = K_e(X_o - X_v) = K_v \frac{d X_v}{d t}$$

Ολοκληρώνοντας αυτή την διαφορική εξίσωση με αρχική συνθήκη ότι $X_e = X_o \quad at \quad t = 0$, μπορούμε να πάρουμε:

$$F(t) = K_e X_0 \, [\exp(-K_e t / K_v)]$$

Επισημαίνεται ότι η ποσότητα K_v/K_e απεικονίζει μία χρονική σταθερά (time constant) και ότι η δύναμη F δεν μειώνεται στιγμιαία όπως σε θα συνέβαινε σε ένα Νευτώνειο ρευστό όταν όλες οι εξασκούμενες δυνάμεις αποσύρονταν. Η δύναμη μειώνεται (decays or relaxes) εκθετικά όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 3-10 παρακάτω. Αυτό το πείραμα λέγεται “stress relaxation”.

Οταν εξετάζουμε την ρεολογική συμπεριφορά πραγματικών πολυμερικών υλικών, διαπιστώνουμε συμπεριφορές όπως στα πειράματα creep και relaxation που ήδη εξατάστηκαν. Ομως οι creep και relaxation ανταποκρίσεις των πραγματικών υλικών δεν μπορούν να περιγραφούν με μία απλή εκθετική καμπύλη. Ενας συνδιασμός (spectrum) από χρόνους χαλάρωσης (relaxation times) απαιτείται για να περιγράψουμε την πραγματική συμπεριφορά των πολυμερικών υλικών. Αυτό θα εξηγηθεί στο επόμενο κεφάλαιο, πώς μπορεί να εφαρμοσθεί.



Σχήμα 3-10. Η ανταπόκριση του στοιχείου/μοντέλου Maxwell σε εφαρμογή μίας ακαριάιας παραμόρφωσης (sudden displacement) X_o . Πείραμα χαλάρωσης τάσης (stress relaxation).